3-Практикалық сабақ

Шексіз аз және шексіз көп функциялар (шамалар). Егер $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ немесе $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$ болса, онда $\alpha=\alpha(x)$ функциясы (шамасы) *шексіз аз функция (шама)* деп аталады.

Егер $\alpha(x)$ шексіз аз шама болса, яғни $\alpha(x)\to 0$, онда $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ *шексіз көп шама* деп аталады, яғни $\dfrac{1}{\alpha(x)}\to\infty$. Сонымен, егер $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, онда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$.

Ш е к с і з а з ш а м а л а р д ы ң қ а с и е т т е р і.

1. Шексіз аз шамалардың алгебралық қосындысы да шексіз аз шама болады.
2. Шексіз аз шама $\alpha=\alpha(x)$-тің шектелген $z=z(x)$ функциясына көбейтіндісі де шексіз аз шама болады
3. Шексіз аз шама $\alpha(x)$-тің $z(x)$ функциясына қатынасы $\dfrac{\alpha(x)}{z(x)}$ да шексіз аз шама болады ($\lim\limits_{x\to a}z(x)\neq 0$).

73. $n\to\infty$ жағдайда $3,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{4},...,\ 2+\frac{1}{n},...$ тізбегінің шегі 2 санына тең екенін көрсету керек.

Шешуі: Тізбектің n-ші мүшесі $x_n=2+\dfrac{1}{n}$. Бұдан, $x_n-2=\dfrac{1}{n}$. ε оң санын алдын ала белгілейік. $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай n санын үлкен етіп таңдап аламыз. Ол үшін $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ деп алу жеткілікті. Онда $|x_n-2|=\left|\dfrac{1}{n}\right|<\varepsilon.$ Ендеше, $\lim x_n=2.$ ▲

74. $n\to\infty$ жағдайда $\dfrac{7}{3},\ \dfrac{10}{5},\ \dfrac{13}{7},...,\dfrac{3n+4}{2n+1},...$ тізбегінің шегі $\dfrac{3}{2}$ санына тең екенін көрсету керек.

Шешуі: $x_n-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3n+4}{2n+1}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2(2n+1)}$. n-нің қандай мәнінде $\dfrac{5}{2(2n+1)}<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатынын анықтайық. $2(2n+1)>\dfrac{5}{\varepsilon}$ болғандықтан $n>\dfrac{5}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}$ болады. Сонымен, егер $n>\dfrac{5}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}$ болса, онда $\left|x_n-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon,$ яғни $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}.$

$\varepsilon=0{,}1$ деп алсақ, $\left|x_n-\dfrac{3}{2}\right|<0{,}1$ теңсіздігі $n>12$ (мысалы, $n=13$) үшін орындалатын болады. Сол сияқты, $\left|x_n-\dfrac{3}{2}\right|<0{,}01$ теңсіздігі $n>124{,}5$ (мысалы,

$n=125$) үшін орындалады, ал $\left|x_n-\dfrac{3}{2}\right|<0{,}001$ теңсіздігі $n>1249{,}5$ (мысалы, $n=1250$) болғанда орындалады. ▲